ÉPREUVES GROUPÉES

Spécialité mathématiques

Jeudi 16 décembre 2021

Durée de l'épreuve : 4 heures

- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Ce sujet comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6.
- Numérotez les pages.
- Faîtes les exercices dans l'ordre que vous voulez.
- Le barème est donné à titre indicatif.
- Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le mentionner sur votre copie.

Exercice 1 **5 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

① Calculer u_1.

② On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$.

(a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

(c) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.

③ (a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :
  u = 0,5
  n = 0
  while ..........................
    u = ..........................
    n = n + 1
  return n
```

(b) Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.
Vous pouvez coder l'algorithme sur la calculatrice ou utiliser le mode suite pour obtenir un tableau des termes de la suite.

④ On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

(a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

(b) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de v_n.

(c) En déduire une formule explicite pour la suite (u_n).
Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 2 **4 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points A(1 ; 0 ; 2), B(2 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) et la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t \\ y &=& -2+t \\ z &=& 4-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

① Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

Réponse A : M(2 ; 1 ; −1) ;
Réponse B : N(−3 ; −4 ; 6) ;
Réponse C : P(−3 ; −4 ; 2) ;
Réponse D : Q(−5 ; −5 ; 1).

② Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

Réponse A : $\left\{\begin{array}{l} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 2 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

Réponse B : $\left\{\begin{array}{l} x = 2-t \\ y = 1-t \\ z = 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

Réponse C : $\left\{\begin{array}{l} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

Réponse D : $\left\{\begin{array}{l} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = 2-2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

③ Les droites Δ et (AB) sont-elles :

Réponse A : sécantes
Réponse B : strictement parallèles
Réponse C : non coplanaires
Réponse D : confondues

④ On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ;
Réponse B : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
Réponse C : D a pour coordonnées (3 ; −1 ; −1) ;
Réponse D : les points A, B, C et D sont alignés.

Exercice 3 **5 points**

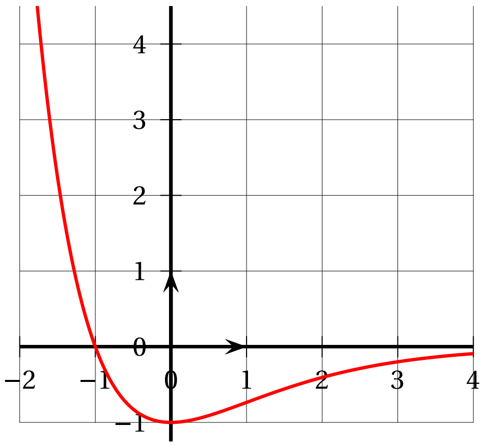
Partie 1

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

① Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

② La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

① Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^{-x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.

② (a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

(b) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations, en y incluant les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.

(c) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

③ Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.

Que représente pour la courbe $\mathscr{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

EXERCICE 4 **6 points**

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}$.

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

① Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

② Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.

③ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

④ Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

La courbe $\mathscr{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la Partie I) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathscr{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathscr{C}$ en ce point.

① Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $\left(t\,;\, \mathrm{e}^{-t}\right)$ de la courbe $\mathscr{C}$.
On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$, c'est-à-dire $h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$.

- (a) Montrer que, pour tout nombre réel t, $h'(t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}$, où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.
- (b) Démontrer que le point A de coordonnées $(\alpha\,;\, \mathrm{e}^{-\alpha})$ est le point de la courbe $\mathscr{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.
  Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.

② On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

- (a) Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.
  On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.
  On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :
  Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D′ de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.
- (b) Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.
  Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.**

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

Exercice 3